Особенности оформления заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом

Терентьева Елена Ивановна,
учитель математики
МАОУ «Технологический лицей»

г.Сыктывкар, 2021

Типичные ошибки:
Задание 20

1. Отсутствие ОДЗ;
2. Ошибки при решении квадратного уравнения (неверная запись формулы корней, дискриминанта);
3. Вычислительные ошибки;
4. Ошибки в действиях с рациональными числами;
5. При введении переменной t, нет обратной замены;
6. При умножении выражения на нуль!
7. Потеря слагаемых при равносильных преобразованиях;
8. Ошибки в формулах сокращенного умножения;
9. Описки, знаки «+» и «-»;
10. Приведение подобных слагаемых;
11. Допускают округление иррациональных чисел;
12. Переход от дробно-рационального уравнения к квадратному;
13. Запись ответа (в скобках);
14. Сложение двух дробей с разными знаменателями (дополнительные множители);
15. Словесное описание (лучше ничего не писать);
16. Сокращение дробей;
17. Термины.

Типичные ошибки:
Задание 21

1. Место нахождения скорости сближения при встречном движении – сумма, пишут разность;
2. Перевод единиц измерения;
3. Неправильные формулы;
4. Отсутствие перехода от расстояния пройденного поездом к длине поезда;
5. Нет краткой записи (схемы, таблицы, единиц измерения);
6. Приближенные значения;
7. Вычислительные ошибки (сокращение дробей).

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление)

Типичные ошибки:
Задание 22

1. Вместо *D(y)* пишут ОДЗ;
2. Не учитывается *D(y)* при построении графика (выколотые точки);
3. Нет исследования (не пишут нахождение значений параметра);
4. Координатная плоскость (нет единичных отрезков, начало отсчета, направление и название координатных лучей);
5. Запись не соответствует построению (прямая или часть прямой);
6. Линейная функция ⇔ прямая пропорциональность;
7. Часть прямой → *D(y)* → точки в таблице;
8. Отсутствие таблиц значений;
9. Нет разрыва/ конец первой его части является началом второй (точки склейки, разрыва);
10. Неверная запись значений параметра в виде двойного неравенства ($-1 < m < -2$ и $(-1; -2)$;
11. Выписывают не все значения параметра;
12. Отсутствие проверки граничной точки;
13. Подпись графика функции;
14. Вычислительные ошибки;
15. Переход от графического представления к алгебраическому вычислению.

Задание 20. Решение уравнений и неравенств

1. ***Решение квадратного уравнения:***

Если уравнение неполное, то решаем, применяя свойства коэффициентов или правила нахождения корня уравнения, определив какому из трех случаев соответствует данное уравнение.

Если уравнение полное, то решаем:
а) либо по свойству коэффициентов;
б) либо по теореме Виета;
в) либо применяя формулу дискриминанта и формулы корней квадратного уравнения;
г) либо разложением на множители.

Задание 20. Пример 2. Решение 1/4

№ 20 с 2021 года

21

Решите уравнение $x^4 = (2x - 15)^2$.

Решение.

Исходное уравнение приводится к виду:

$$(x^2 - 2x + 15)(x^2 + 2x - 15) = 0.$$

Уравнение $x^2 - 2x + 15 = 0$ не имеет корней.

Уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$ имеет корни -5 и 3.

Ответ: -5; 3.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 20. Пример 2. Решение 2/4

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

Решение.

$x^4=(2x-15)^2$, $(x^2)^2-(2x-15)^2=0$, $(x^2-2x+15)(x^2+2x-15)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю, если один из множителей равен нулю. Получаем: $x^2-2x+15=0$ или $x^2+2x-15=0$.

$x^2-2x+15=0$, $x^2-2x+1+14=0$, $(x-1)^2=-14$ не имеет корней.

$x^2+2x-15=0$, $x^2+2x+1-16=0$, $(x+1)^2-4^2=0$, $(x+1-4)(x+1+4)=0$, $(x-3)(x+5)=0$

откуда $x-3=0$ или $x+5=0$; $x=3$ или $x=-5$.

Ответ: -5; 3.

Задание 20. Пример 3. Решение 1/5

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Решение.

Пусть $t = (x-1)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

откуда $t = -1$ или $t = 3$.

Уравнение $(x-1)^2 = -1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2 = 3$ имеет корни $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 20. Пример 3. Решение 5

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

$$(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0 \Leftrightarrow \left((x-1)^2-1\right)^2=2^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-1)^2=3\\(x-1)^2=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{3}\\x-1=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{3}\\x=1-\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right\}$.

Задание 20. Пример 3. Решение 3/5

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$.

Решение.

Пусть $(x-1)^2=t$, $t\geq 0$, тогда уравнение принимает вид:

$t^2-2t-3=0$, откуда $t=-1$ или $t=3$.

$t=-1$ не удовлетворяет условию $t\geq 0$,

$t=3$; $(x-1)^2=3$; $x-1=\sqrt{3}$ или $x-1=-\sqrt{3}$; $x=1+\sqrt{3}$ или $x=1-\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

1. Решение дробно рационального уравнения:

1 способ:

1 Перенести все члены уравнения в одну часть.

2 Привести к общему знаменателю и сложить полученные дроби.

3 Приравнять числитель к нулю и решить полученное уравнение.

4 Проверить, не обращают ли знаменатель в нулю полученные корни.

2 способ:

1 Найти общий знаменатель всех дробей, входящих в уравнение.

2 Умножить обе части уравнения на найденный общий знаменатель.

3 Решить полученное целое уравнение.

4 Проверить, не обращают ли полученные корни общий знаменатель в нуль.

$$\frac{1}{x^2}^{\backslash x^2} - \frac{1}{x}^{\backslash x} - 6 = 0$$

$$\frac{-6x^2 - x + 1}{x^2} = 0$$

$$\begin{cases} -6x^2 - x + 1 = 0 \\ x^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$-6x^2 - x + 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) =$$

$$= 1 + 24 = 25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-5}{-12} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{1+5}{-12} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$

Задание 20. Пример 4. Решение

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Решение.

Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-t-6=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=3$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$.

Уравнение $\frac{1}{x}=3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 20. Пример 4. Работа 2

№ 20 с 2021 года

Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

21) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0 \quad |\cdot x^2$, $x\neq 0$

$-6x^2-x+1=0$

$D=1-4\cdot(-6)\cdot 1=25=5^2$

$x_1=-0{,}5$

$x_2=\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-0{,}5$; $x_2=\frac{1}{3}$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

1. Решение неравенств:

Метод интервалов — это специальный алгоритм, предназначенный для решения сложных неравенств вида $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Алгоритм состоит из 4 шагов:

1. Рассмотреть функцию *y= f(x);*
2. Решить уравнение $f(x) = 0$. Таким образом, вместо неравенства получаем уравнение, которое решается намного проще;
3. Отметить все полученные корни на координатной прямой.
Таким образом, прямая разделится на несколько интервалов;
4. Выяснить знак (плюс или минус) функции $f(x)$ на самом правом интервале. Для этого достаточно подставить в $f(x)$ любое число, которое будет правее всех отмеченных корней;
5. Отметить знаки на остальных интервалах. Для этого достаточно запомнить, что при переходе через каждый корень знак меняется.

Вот и все! После этого останется лишь выписать интервалы, которые нас интересуют. Они отмечены знаком «+», если неравенство имело вид $f(x) > 0$, или знаком «−», если неравенство имеет вид $f(x) < 0$.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$

$x^2 - 14x + 49 - \sqrt{11}x + 7\sqrt{11} < 0$

метод интервалов

$y = x^2 - (14+\sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11}$

$D(y) = R$

нули ф-ции: $y = 0$ $\quad x^2 - (14+\sqrt{11})x + 49 + 7\sqrt{11} = 0$

$D = b^2 - 4ac$

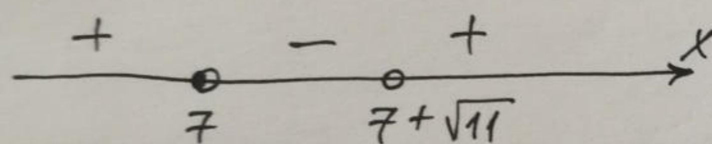
$D = (14+\sqrt{11})^2 - 4\cdot(49 + 7\sqrt{11}) =$

$= 196 + \cancel{28\sqrt{11}} + 11 - 196 - \cancel{28\sqrt{11}} =$

$= 11$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{14 + \sqrt{11} - \sqrt{11}}{2} = 7$

$x_2 = \dfrac{14 + \sqrt{11} + \sqrt{11}}{2} = 7 + \sqrt{11}$



$y(0) = 0^2 - (14+\sqrt{11})\cdot 0 + 49 + 7\sqrt{11} > 0$

$y < 0$ при $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$

Графический способ (метод парабол);

Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$; $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} < 0$.

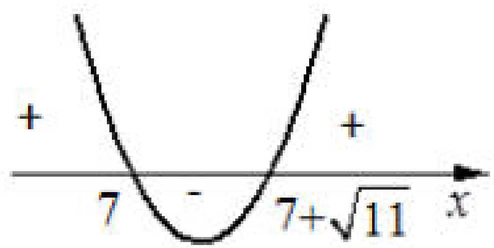
Рассмотрим функцию $y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.

Найдем нули функции: $x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11} = 0$;

$x = \dfrac{14+\sqrt{11}-\sqrt{11}}{2}$, $x = \dfrac{14+\sqrt{11}+\sqrt{11}}{2}$; $x = 7$, $x = 7+\sqrt{11}$.

Схематично изобразим параболу

$y = x^2 - \left(14+\sqrt{11}\right)x + 49 + 7\sqrt{11}$.



$y < 0$ при $x \in (7; 7+\sqrt{11})$

Ответ: $(7; 7+\sqrt{11})$.

Алгебраический способ (совокупность систем)

Решите неравенство $(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)$.

Решение.

$$(x-7)^2<\sqrt{11}(x-7)\Leftrightarrow(x-7)\left(x-7-\sqrt{11}\right)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-7<0,\\x-7-\sqrt{11}>0\end{cases}\\\begin{cases}x-7>0,\\x-7-\sqrt{11}<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<7,\\x>7+\sqrt{11}\end{cases}\\\begin{cases}x>7,\\x<7+\sqrt{11}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 7<x<7+\sqrt{11}.$$

Ответ: $(7;7+\sqrt{11})$.

Задание 20. Пример 1. Работа 1

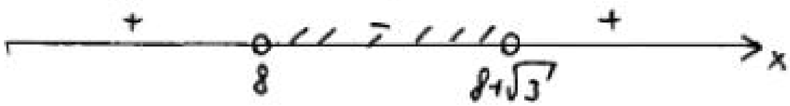
№ 20 с 2021 года

№21

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$

$\cancel{(x-8)(x-8}$ $(x-8)^2-\sqrt{3}(x-8)<0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0$



$x\in(8, 8+\sqrt{3})$

Ответ $x\in(8, 8+\sqrt{3})$

21 Решите неравенство $(x-8)^2<\sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0,$$

откуда $8<x<8+\sqrt{3}$.

Ответ: $(8; 8+\sqrt{3})$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

0 баллов

Нет решения неравенства, не прописан метод интервалов

Задание 20. Пример 1. Работа 2

№ 20 с 2021 года

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}\cdot(x-8)$$
$$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$$
$$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$$
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8<0 \\ x-8-\sqrt{3}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+8>0 \\ x-8-\sqrt{3}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-8 \\ x>8+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$$
$$\begin{cases} x>-8 \\ x<8+\sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $x\in(-8;\ 8+\sqrt{3})$

21 Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right)<0,$$

откуда $8<x<8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8;\ 8+\sqrt{3}\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

1 балл

Задание 21. Решение текстовых задач

Алгоритм:

1. Прочитать задачу;
2. Ввести неизвестную;
3. Составить таблицу (краткую запись, схему), выразить искомую переменную через данные и вспомогательные величины;
4. «По условию известно, что….». Построение математической модели;
5. Составить и решить уравнение, т.е. Решение математической модели;
6. Проанализировать полученный результат исходя из содержания задачи.
7. Записать ответ.

Задание 21. Пример 3. Работа 3

№ 21 с 2021 года

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.¶

Ответ: 18 км/ч.¶

№22

	v	t	S
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4}-\frac{77}{x+4}=2$$

$$\frac{77(x+4)-77(x-4)-2(x^2-16)}{x^2-16}=0$$

ОДЗ: $x\neq 4$; $x\neq -4$

$77(x+4-x+4)-2(x^2-16)=0$

$77\cdot 8-2x^2+32=0$

$616-2x^2+32=0$

$2x^2-648=0$

$x^2=324$

$x_1=18$

$x_2=-18$

Ответ: 18

0 баллов

Задание 21. Пример 4. Работа 2

№ 21 с 2021 года

Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 80 км/ч.

№22

	скор.	время	расстояние
I автом	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км
II автом	$x-20$ км/ч	$\frac{240}{x-20}$ ч	240 км

$$\frac{240}{x-20} - \frac{240}{x} = 1 \qquad \frac{240x - 240x - 240 \cdot 20}{x(x-20)} = 1$$

$$x^2 - 20x = 4800$$

$$x^2 - 20x - 4800 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -60 \text{ (не удв.)} \\ x_2 = 80 \end{cases}$$

Ответ: 80 км/ч

0 баллов

Задание 22. Построение графика той или иной функции, а затем указать, при каких значениях параметра этот график пересекается с неким другим графиком, касается его или же, к примеру, имеет с ним несколько точек пересечения

Встречаются:
Квадратичная функция;
Дробно рациональная функция;
Кусочная функция.

16. Линейная функция и её график

Пример 3. Построим график функции $y = 2x + 3$.

▶ Функция $y = 2x + 3$ линейная, поэтому её графиком является прямая. Используя формулу $y = 2x + 3$, найдём координаты двух точек графика:
если $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -1$;
если $x = 1$, то $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.
Отметим точки $A(-2; -1)$ и $B(1; 5)$. Проведём через эти точки прямую (рис. 33). Прямая AB есть график функции $y = 2x + 3$. ◁

При построении графика линейной функции часто бывает удобно в качестве одной из точек брать точку с абсциссой 0.

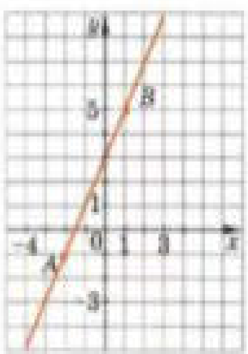


Рис. 33

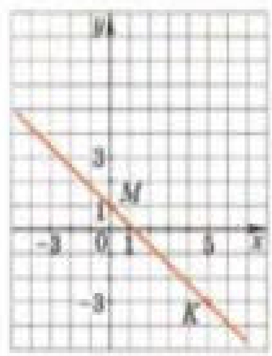


Рис. 34

Пример 4. Построим график функции $y = -0{,}8x + 1$.

▶ Найдём координаты двух точек графика:
если $x = 0$, то $y = -0{,}8 \cdot 0 + 1 = 1$;
если $x = 5$, то $y = -0{,}8 \cdot 5 + 1 = -3$.
Отметим точки $M(0; 1)$ и $K(5; -3)$ и проведём через них прямую (рис. 34). Прямая MK — график функции $y = -0{,}8x + 1$. ◁

Для тех, кто хочет знать больше

17. Задание функции несколькими формулами

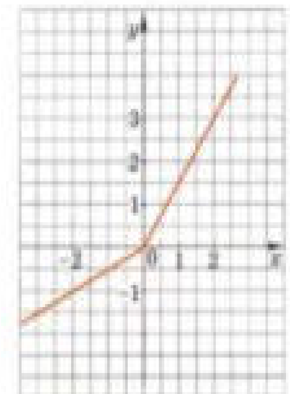


Рис. 46

Пример 2. Построим график функции $y = x + 0{,}5|x|$.

▶ Освободимся от знака модуля. Если $x < 0$, то $|x| = -x$. Значит,

$$y = x - 0{,}5x = 0{,}5x \text{ при } x < 0.$$

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$. Значит, $y = x + 0{,}5x = 1{,}5x$ при $x \geq 0$.
Итак, данную функцию можно задать двумя формулами:

$$y = \begin{cases} 0{,}5x, \text{ если } x < 0, \\ 1{,}5x, \text{ если } x \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке 46 изображён график этой функции. Он состоит из двух лучей. ◁

7. Построение графика квадратичной функции

Чтобы построить график квадратичной функции, нужно:
1) найти координаты вершины параболы и отметить ее в координатной плоскости;
2) построить еще несколько точек, принадлежащих параболе;
3) соединить отмеченные точки плавной линией.

Заметим, что абсциссу m вершины удобно находить по формуле $m = -\frac{b}{2a}$. Ординату n можно находить, подставив найденное значение абсциссы в формулу $y = ax^2 + bx + c$, так как при $x = m$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n = n.$$

Приведем примеры построения графиков квадратичных функций.

Пример 1. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$.

▶ Графиком функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Найдем координаты m и n вершины этой параболы:

$$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot 0{,}5} = -3;$$

$$n = 0{,}5 \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3) + 0{,}5 = -4.$$

Значит, вершина параболы — точка $(-3; -4)$.
Составим таблицу значений функции:

x	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	4	0,5	−2	−3,5	−4	−3,5	−2	0,5	4

Построив точки, координаты которых указаны в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции $y = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5$ (рис. 31). ◁

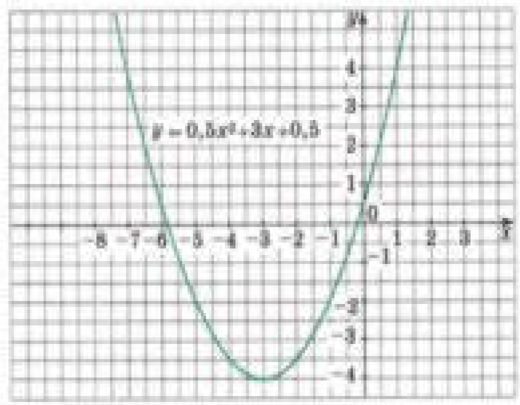


Рис. 31

При составлении таблицы и построении графика учитывалось, что прямая $x = -3$ является осью симметрии параболы. Поэтому мы брали точки с абсциссами −4 и −2, −5 и −1, −6 и 0, симметричные относительно прямой $x = -3$ (эти точки имеют одинаковые ординаты).

10. Дробно-линейная функция и ее график

Вам известны свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$. Отметим еще одно свойство этой функции и особенность ее графика.

При неограниченном возрастании положительных значений аргумента значения функции, оставаясь положительными, убывают и стремятся к нулю, т. е. если $x > 0$ и $x \to +\infty$, то $y \to 0$. Аналогично если $x < 0$ и $x \to -\infty$, то $y \to 0$. На графике это свойство проявляется в том, что точки графика по мере их удаления в бесконечность (т. е. при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$) неограниченно приближаются к оси x. Говорят, что ось x, т. е. прямая $y = 0$, является *асимптотой* графика функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

Пример 1. Построим график функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$.

▶ Для этого выделим из дроби $\frac{2x+4}{x-1}$ целую часть, представив дробь в виде $n + \frac{k}{x-m}$.

Имеем

$$\frac{2x+4}{x-1} = \frac{2x-2+6}{x-1} = \frac{2(x-1)+6}{x-1} = 2 + \frac{6}{x-1}.$$

Здесь $k = 6$, $m = 1$, $n = 2$.

График функции $y = \frac{6}{x-1} + 2$ можно получить из графика функции $y = \frac{6}{x}$ с помощью двух параллельных переносов: сдвига гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на 1 единицу вправо вдоль оси x и сдвига полученного графика $y = \frac{6}{x-1}$ на 2 единицы вверх в направлении оси y. При этом преобразовании сдвинутся и асимптоты гиперболы $y = \frac{6}{x}$: ось x перейдет в прямую $y = 2$, а ось y — в прямую $x = 1$.

Для построения графика данной функции поступим так: проведем в координатной плоскости пунктиром асимптоты: прямую $x = 1$ и прямую $y = 2$. Так как гипербола состоит из двух ветвей, то для построения этих ветвей составим две

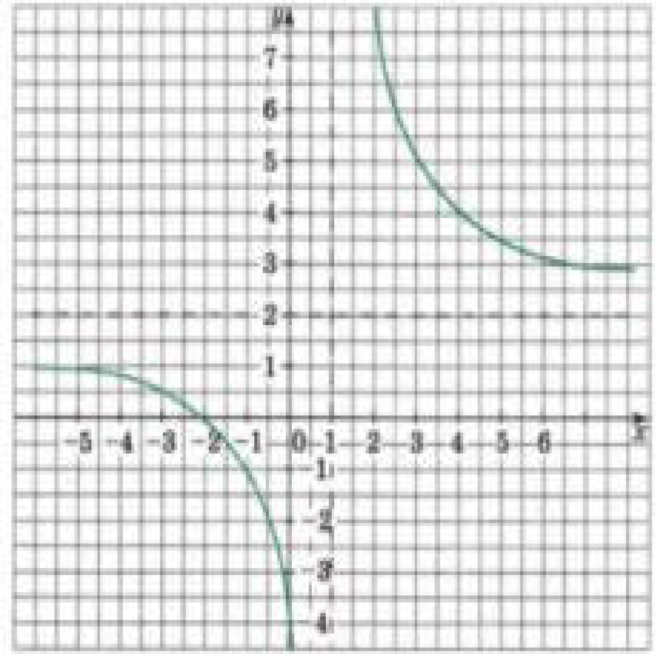


Рис. 45

таблицы: одну для $x < 1$, другую для $x > 1$.

x	−5	−3	−2	−1	0
y	1	0,5	0	−1	−4

x	2	3	4	5	7
y	8	5	4	3,5	3

Отметив в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в первой таблице, и соединив их плавной непрерывной линией, получим одну ветвь гиперболы. Аналогично, используя вторую таблицу, получим вторую ветвь гиперболы. График функции $y = \frac{2x+4}{x-1}$ изображен на рисунке 45. ◁

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, \text{ если } x\ge -2, \\ -\dfrac{18}{x}, \text{ если } x<-2, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Решение.

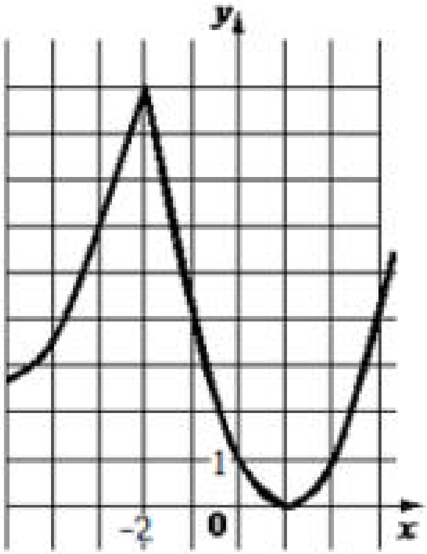
Построим график функции $y = -\frac{18}{x}$.

Графиком является гипербола, состоящая из двух ветвей, расположенных во второй и четвертой четвертях.
Так как нужна ветвь гиперболы при $x < -2$, то строим ветвь во второй четверти.

x	–1	**–2**	–3	–6	–9	–18
y	18	**9**	6	3	2	1

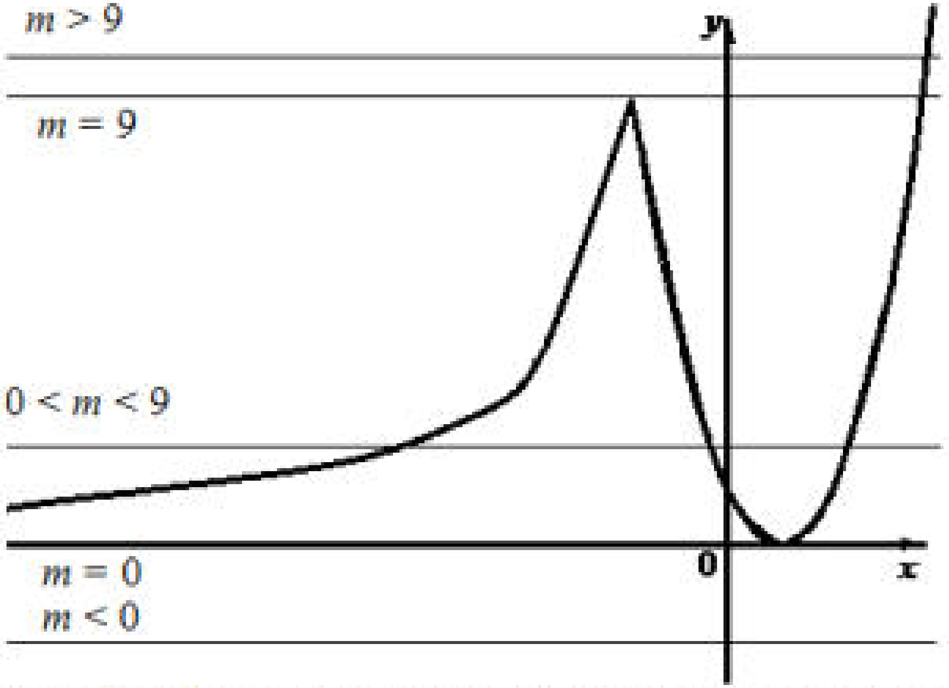
Построим график функции $y = x^2 - 2x + 1$. Квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх.
Вершина параболы – (1; 0). Так нам нужна часть параболы при при $x \geq -2$, то вычислим координаты точек при $x \geq -2$, учитываю симметрию относительно прямой $x = 1$.

x	**–2**	–1	0	1	2	3	4
y	**9**	4	1	0	1	4	9



Оставим ветвь гиперболы при $x < -2$ и часть параболы при $x \geq -2$. (В точке $x = -2$ происходит «склейка» графиков.)

Построим семейство прямых $y = m$, параллельных или совпадающих с осью Ox.



При $m < 0$ прямая $y = m$ с графиком функции не имеет общих точек;
при $m = 0$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку;
при $0 < m < 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет три общих точки;
при $m = 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет две общие точки;
при $m > 9$ прямая $y = m$ с графиком функции имеет одну общую точку.

Прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m = 0$ и при $m \geq 9$.

Ответ: 0; $[9; +\infty)$.

22) $y = |x^2+8x+12|$

$D(y): R$

1) $y = x^2+8x+12$

кв. ф-ия, гр-парабола, ветви вверх $(a>0)$

нули: $y=0$ $x^2+8x+12=0$

$D = b^2-4ac;$

$D = 64-4\cdot1\cdot12 = 16 > 0$

по обр. т. Виета

$\begin{cases} x_1+x_2=-8 \\ x_1 x_2 = 12 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-6 \end{cases}$

вершина A

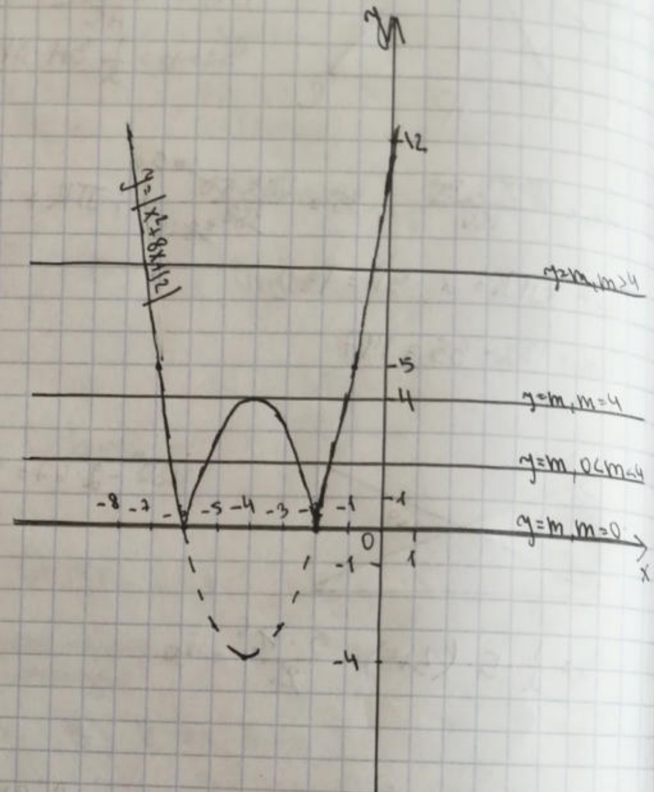
$x_в = \frac{-b}{2a}$; $x_в = \frac{-8}{2} = -4$

$y_в = 4^2-8\cdot4+12 = 16-32+12 = -4$

$A(-4;-4)$

доп. точки:

x	-6	-5	-3	-2	-7	-1	-8	0
y	0	-3	-5	0	5	5		



гр. функции $y=|x^2+8x+12|$ получается из гр. $y=x^2+8x+12$ путем отображения части этого графика, лежащей ниже оси Ox, симметрично относительно оси Ox

2б

2) $y=m$

множество прямых параллельных или совпадающих оси Ox

3) $y=m$, $m=0$ 2 общие точки

$y=m$; $0<m<4$ 4 общие точки

$y=m$; $m=4$ 3 общие точки

$y=m$; $m>4$ 2 общие точки

Ответ: при $0<m<4$

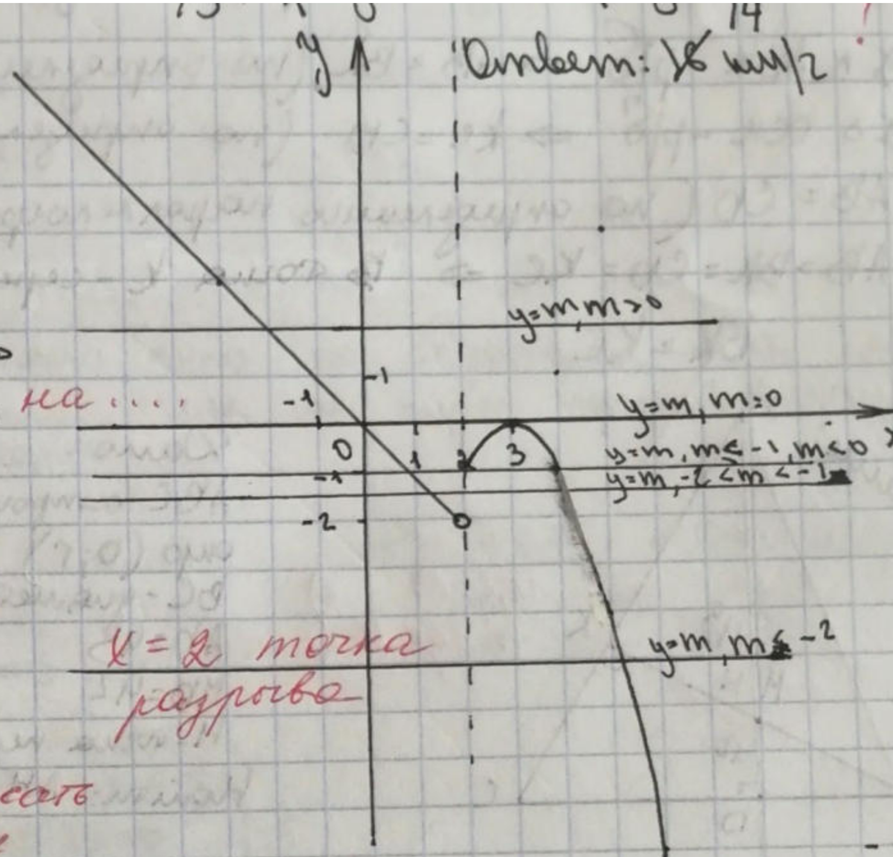
Ответ: 16 км/ч

(22) $y = \begin{cases} -x^2+6x-9 & \text{при } x \geq 2 \\ -x & \text{при } x<2 \end{cases}$

1. $y=-x^2+6x-9$ при $x \geq 2$
кв $y=-(x-3)^2$
кв. ф-ция, гр.-парабола, ветви вниз, т.к.
$a=-1<0$
$y=x^2 \to y=(x-3)^2$ параллельный перенос параболы вдоль оси Ox ~~влево~~ вправо на ... →
$\to y=-(x-3)^2$ симм. относит. Ox

2. $y=-x$
лин. ф-ция, гр.-прямая $x<2$ часть

x	0	-3
y	0	3



x = 2 точка разрыва

2б

3. $y=m$
семейство прямых ∥ или совпадающих с Ox
лучше прописать словами
исследование:
$y=m$, $m\leq-2$, 1 общ
$y=m$, $-2<m<-1$ 2 общ
$y=m$, $m=-1$ 3 общ
$y=m$, $-1<m<0$ 3 общ
$y=m$, $m=0$ 2 общ
$y=m$, $m>0$ 1 общ

Ответ: при $-2<m$ ... $m \geq -2$

(22) $y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{2,5}-\frac{2,5}{x}\right|\right)+\frac{x}{2,5}+\frac{2,5}{x}$

$\frac{x}{2,5}-\frac{2,5}{x}=\frac{x^2-6,25}{2,5x}$

нули модуля: $x=\pm 2,5$

$x\neq 0$

$-\quad -2,5\quad +\quad -\quad 2,5\quad +$

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(\frac{2,5}{x}-\frac{x}{2,5}+\frac{x}{2,5}+\frac{2,5}{x}\right) & x\le 2,5;\ 0<x\le 2,5\\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2,5}-\frac{2,5}{x}+\frac{x}{2,5}+\frac{2,5}{x}\right) & x\ge 2,5;\ -2,5\le x<0\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}\frac{2,5}{x}, & x\le -2,5;\ 0<x\le 2,5\\ \frac{x}{2,5}, & x\ge 2,5;\ -2,5\le x<0\end{cases}$$

1) $y=\frac{2,5}{x}$; $x\le -2,5$, $0<x\le 2,5$

x	1	0,5	2	2,5	−4	−3	−2,5
y	2,5	5	1,25	1	−0,625	−0,8	1

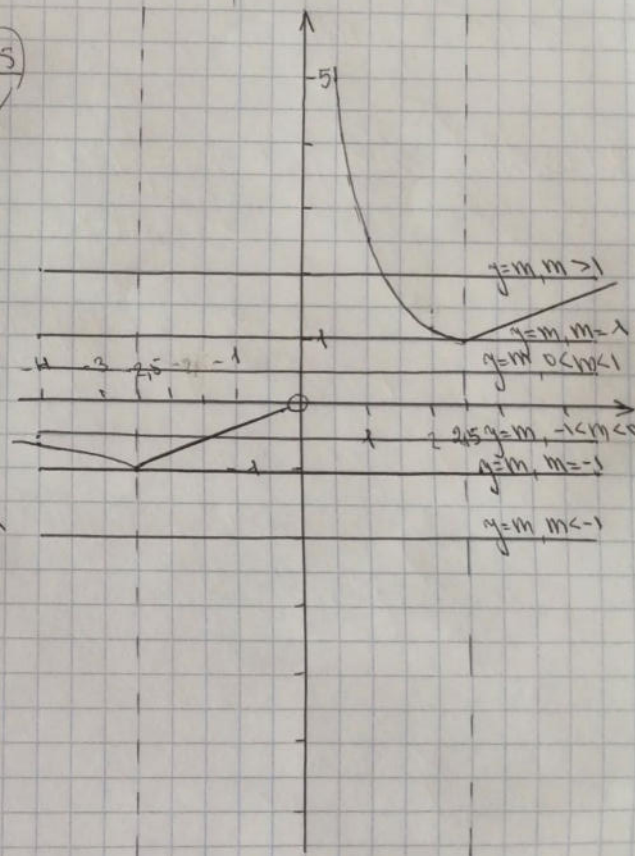
2) $y=\frac{x}{2,5}$

x	−2,5	2,5
y	−1	1

$y=m$

множество прямых параллельных Ox или совпадающих с ней

1) $y=m$, $m<-1$ общих точек нет
2) $y=m$, $m=-1$ 1 общая точка
3) $y=m$, $-1<m<0$ 2 общие точки
4) $y=m$, $0<m<1$ общих точек нет
5) $y=m$, $m=1$ 1 общая точка
6) $y=m$, $m>1$ 2 общие точки



Ответ: при $m=-1$ и $m=1$

Типичные ошибки
Задание 23

1. Отсутствие чертежа (или не соответствует условию);
2. Допускают ошибки в чертежах (обозначение разных углов одинаковыми дугами);
3. Отсутствие дано или его части, дано не указано на чертеже;
4. Отсутствуют ссылки на свойства, определения, теоремы;
5. Путают названия углов (соответственные, смежные, накрест лежащие);
6. Пропускают части решения, не доказывают, что треугольник прямоугольный, применяют теорему Пифагора;
7. Допускают ошибки в пояснениях;
8. При введении обозначений, не описывают их;
9. Не прописывают дополнительное построение;
10. Допускают запись $AB^2 = 15; AB = \pm\sqrt{15}$
11. Допускают описки.

Типичные ошибки
Задание 24

1. Ошибки при выполнении чертежа (дан выпуклый четырехугольник – рисуют параллелограмм или ромб…);
2. Рассмотрение частного случая доказательства задачи (упрощают условие задачи);
3. При доказательстве используют окружность, при этом не описывают ее существование;
4. Путают признаки равенства треугольников и подобия треугольников;
5. Используют неправильные формулировки;
6. Не указывают почему треугольники подобны и признак подобия;
7. Производят подмену геометрических понятий (прямая - отрезок, угол - вершина);
8. Обозначение углов одной буквой;
9. Необоснованный вывод пропорциональности сходственных сторон;
10. Использование фактов без доказательства;
11. Использование букв, отсутствующих на чертеже;

Около любого четырехугольника можно описать окружность!

Типичные ошибки

Задание 25

1. Неверное построение окружности;
2. Отсутствие доказательства подобия треугольников;
3. Отсутствие введения переменной;
4. Отсутствие принадлежности точки к прямой;
5. Введение дополнительных (несуществующих фактов и условий…);
6. Неверная трактовка следствия из теоремы о касательных и секущих.